# Complexité d'algorithmes

## Rappels

Soient $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

- $f(n) = O(g(n))$, si $\exists c, n_0 \in \mathbb{R}^+$ tels que $n \geq n_0, f(n) \leq c \cdot g(n)$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$, si $\exists c, n_0 \in \mathbb{R}^+$ tels que $n \geq n_0, f(n) \geq c \cdot g(n)$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$, si $f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$.
- $f(n) = o(g(n))$, si $lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.
- $f(n) = \omega(g(n))$, si $lim_{n \to \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$.

$log^*(n) = mini \geq 0 : log^{(i)}(n) \leq 1$

et

$log^{(i)}(n) =$

$$log^{(i)}(n) = \begin{cases} n, \text{ si } i = 0 \\ log(log^{(i-1)}(n), \text{ si } i > 0etlog^{(i-1)}(n) > 0 \\ \text{indéfini , si } i > 0 \text{ et } log^{(i-1)}(n) \leq 0 \text{ ou si } log^{(i-1)}(n) \text{ est indéfini} \end{cases} \tag{1}$$

## Exercice 1

### Prouver que $(n+1)^2 = O(n^2)$

$f(n) = (n+1)^2, g(n) = n^2$

$(n+1)^2 = O(n^2) \Leftrightarrow \exists c, n_0 / \forall n > n_0, f(n) \leq c \cdot g(n)$

$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2(1 + 2/n + 1/n^2) \leq n^2(1 + 2 + 1) \leq 4n^2$

$\Rightarrow (n+1)^2 = O(n^2)$

### Montrer que $log(n) = O(n)$

$n = 1 \Rightarrow 0 \leq 1$

Supposons que $log(n) \leq n$

$\exists c = 1, n = 1, \forall n \geq n_0, log(n) \leq c \cdot n$

$log(n) = O(n)$

**Montrer que** $3nlog(n) = O(n^2)$

Il suffit de prendre $c = 3$, et $n_0 = 1$, on a :

$\forall n \geq 1, log(n) \leq n,$

$3n \cdot log(n) \leq 3n^2.$

**Montrer que** $n^2/2 - 3n = \Theta(n^2)$

$C_1 n^2 \leq n^2/2 - 3n \leq C_2 n^2,$

**Montrer que** $6n^3 \neq \Theta(n^2)$

$lim(6n^3/k \cdot n^2) = lim(n) = +\infty$

$\nexists k/6n^3 \leq k \cdot n^2,$

donc $6n^3 \neq \Theta(n^2)$

## Exercice 2

Classement en fonction des vitesses de croissance asymptotique.

$1 < 2^{100^{100}} < log^*(log(n)) < log^a(n) < ln(n) \simeq \sum_{n=1}^{n} 1/n < (\sqrt{2})^{log(n)} < log(n!) \simeq nlog(n) < n^2 \simeq \sum_{k=1} nk < (log(n))^{log(n)} \simeq n^{log(log(n))} < 2^n < 3^n < n!$

Montrons que $\Theta(3^n) \neq \Theta(2^n)$

Supposons que $O(3^n) = O(2^n)$

$\Rightarrow \exists c, n$ tels que $3^n \leq 2^n \Rightarrow (3/2)^n \leq c$, ce qui est absurde.

## Exercice 3

Soit $a \geq 1$ et $b > 1$, $f(n)$ fonction supérieure à 0.

$T(n) = a, T(n/b) + f(n)$

$T(n)$ est bornée asymptotique comme suit :

Si $f(n) = O(n^{log_b(a-\epsilon)})$, pour $\epsilon > 0$, alors $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)})$.

Si $f(n))O(n^{log_b(a)})alorsT(n) = O(n^{log_b(a)} \cdot log(n))$.