# Le hachage

## Question préliminaire

**Montrer que la hauteur d'un tas est** $\lfloor log(n) \rfloor$

Soit un tas de hauteur h. Le nombre de feuilles est alors égal à $2^h$. Le nombre de noeuds internes est égal à $2^h - 1$.

Si n est le nombre de noeuds d'un tas, alors

$n \leq 2^h + 2^h - 1$

$n \leq 2^{h+1} - 1$

$\Rightarrow n < 2^{h+1}$

$\Rightarrow log(n) < h + 1$

$\Rightarrow log(n) \leq h$

$\Rightarrow h = \lfloor log(n) \rfloor$

## Exercice 1

| | Hachage en chaînage | Addressage ouvert |
|---|---|---|
| Inserer | $O(1 + \alpha)$ | $O(1 + \alpha)$ |
| Rechercher (sans succès) | $O(1 + \alpha)$ | $O((1/\alpha) log(1/(1 - \alpha)))$ |
| Rechercher (avec succès) | $O(1 + \alpha)$ | $O(1/(1 - \alpha))$ |

$\alpha = \frac{n}{m}$

n étant le nombre de clés, et m le nombre de cases.

## Exercice 2

Hachage avec chaînage. Rechercher le coût lorsque la table est remplie à 50%, puis à 90%.

à moitié : $O(1 + \alpha) = O(1 + 0.5) = O(1.5) = O(1)$

à 90% : $0(1 + 0.9) = O(1)$.

Le coût est le même.

Cas particulier de l'addressage ouvert ; cela dépend de si la recherche aboutie à un succès ou non.

Dans tous les cas, le coût des algorithmes se rapporte à du $O(1)$.

## Exercice 3

Hachage avec chaînage : quelque soit l'une des 3 opérations, on cherche à montrer que le coût est constant en moyenne, se rapportant à du $O(1)$.

Il suffit de montrer que $n = O(m) \Rightarrow O(\frac{n}{m}) = O(1)$

$\Rightarrow O(1 + \alpha) = O(1 + \frac{n}{m}) = O(1)$

## Exercice 4

**Donner le code des opérations INSERER(T,d) et Supprimer(T,d) dans le cas du hachage avec addressage ouvert.**

```
Insérer (T, k)
  i <- 0
  Répéter
    j <- h(K, i)
    Si T[j] = Nil Alors
      T[j] <- K
      Retourner j
    Finsi
    i <- i + 1
  Jusqu'à ce que i = n - 1
  << Erreur >>
Fin

Supprimer (T,d)
  i <- 0
  Répéter
    j <- h(K, i)
    Si T[j] = K Alors
      T[j] = Nil
      retourner j
    Finsi
    i <- i + 1
  Jusqu'à i = m - 1
```

```
  <<Erreur>>
Fin
```

## Exercice 5

### Méthode de la division

Avec la méthode de la division, la fonction de hachage est $h(k) = kmod(m)$

**Montrez qu'il faut éviter en général que m soit une puissance de 2 ou une puissance de 10.**

Soit k = 1001. h(k) est constitué de p bits de poids faible de k. Les risques de colision sont donc importants. Afin de limiter ces derniers, il faut choisir m très grand et premier.

### Méthode de la multiplication

Dans la méthode de la multiplication, la fonction de hachage vaut :

$h(k) = \lfloor m(k \cdot Amod1) \rfloor$, avec $0 < A < 1$

**Donnez la valeur de h(k) lorsque m = 8.**

$m = 2^3$

$A = .1011001$

$K = 1101011$

$KA \cdot mod(1) = KA - \lfloor KA \rfloor$

$KA = 1001010.0110011$

$m \cdot (KAmod(1)) = 011.001$

$\Rightarrow h(k) = 011.$