Séance de TD 07

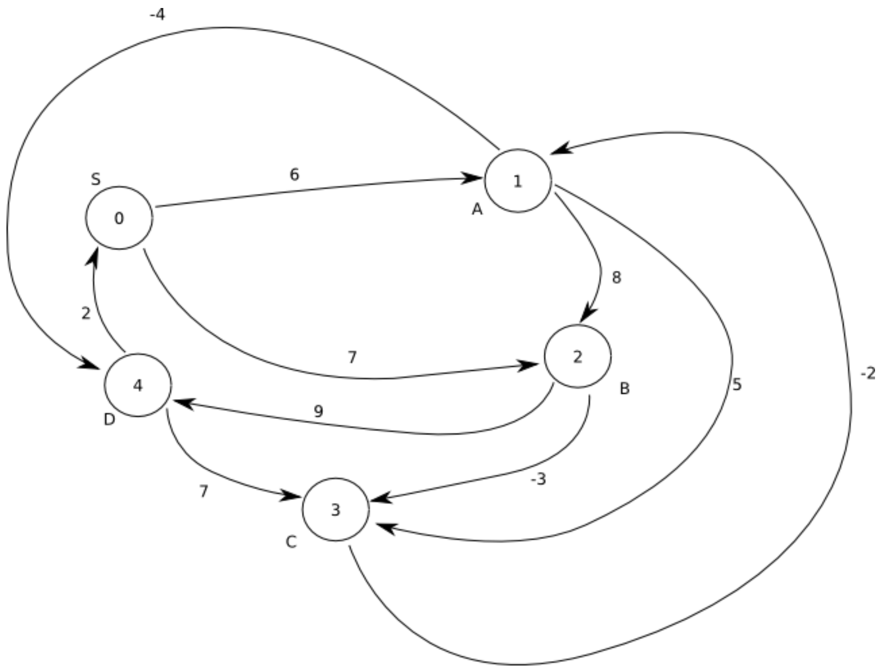
1 Exercice 1

Soit la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 7 & +\infty & +\infty \\ +\infty & 0 & 8 & 5 & -4 \\ +\infty & +\infty & 0 & -3 & 9 \\ +\infty & -2 & +\infty & 0 & +\infty \\ 2 & +\infty & +\infty & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1 Question 1 : Graphe

Donnez le graphe associé à la matrice A



1.2 Question 2 : Algorithme de Bellman-Ford

Appliquez l'algorithme de Bellman-Ford sur le graphe obtenu en considérant le sommet 1 comme origine

Itération	d(S)	d(A)	d(B)	d(C)	d(D)
Initialisation	0	∞	∞	∞	∞
1	0	6	7	∞	∞
2	0	6	7	11	2
3	0	2	7	4	-2

1.3 Question 3 : Arborescence des plus courts chemins

Donnez l'arborescence des plus courts chemins obtenus

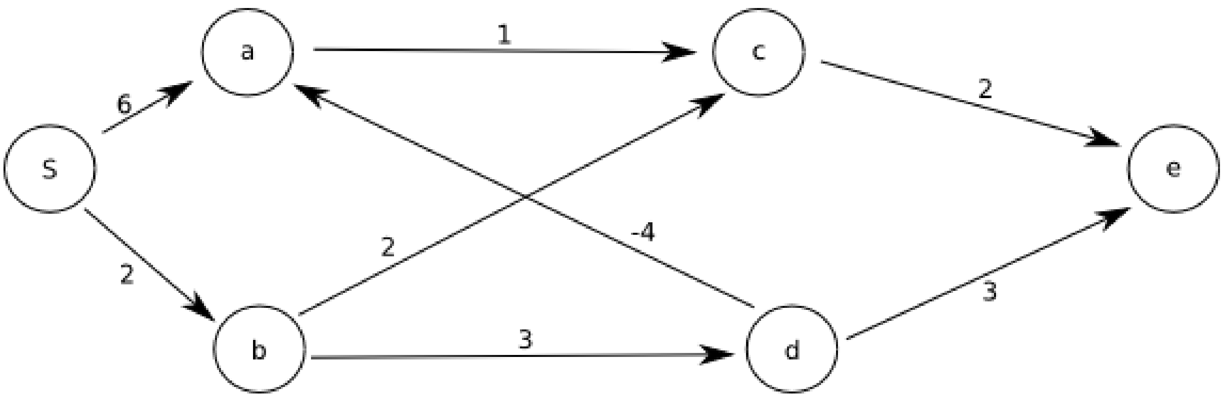
?

2 Exercice 2

Algorithme de Dijkstra et valuations négatives

2.1 Question 1 : Application

Appliquez l'algorithme de Dijkstra au graphe suivant



- s-a : sbda : 1
- s-b : 2
- s-c : sbdac : 2
- s-d : cbd : 5
- s-e : sbdace : 4

Direction	d(S)	d(A)	d(b)	d(c)	d(d)	d(e)
Initial	0	∞	∞	∞	∞	∞
S	0	6	2	∞	8	∞
b	0	6	2	4	5	∞
c	0	6	2	4	5	6
d	0	1	2	4	5	6
a	0	1	2	2	5	6
e	0	1	2	2	5	6

Dijkstra ne prend pas en compte les poids négatifs. Par ailleurs il ne fonctionne que dans le cas d'un graphe à valuations positives. Enfin, chaque sommet n'est traité qu'une seule fois.

3 Exercice 3

3.1 Question 1 : Algorithme de Floyd Warshall

Donnez l'algorithme de Floyd Warshall

Pour le calcul des plus courts chemins en utilisant l'algorithme de FW on calcule les matrices $A^{(k)}$, $k = 1, ..., n$ où n est le nombre de sommets.

$$A^{(k)}[i.j] = mincout(p), p \in [i; j] et I(p) \subseteq 1, ..., k$$

$I(p) = \{s1, ..., s_{k-1}\}$ étant les sommets internes du chemin P.

Calculer un plus court chemin de i à j passant par K sommets revient à calculer l'élément $A^{(k)}[i \cdot j]$ de la matrice $A^{(k)}$.

$$M^{(k)}[i, j] = cout(A), p \in [i; j] et I(p) \leq 1...k$$

Donnons l'algorithme permettant de calculer les matrices $A^{(k)}$ et $Pre^{(k)}$ pour k de 1 à n.

```
Pour i de 1 à n Faire
  Pour j de 1 à n Faire
    A^0[i,j] = A[i,j]
    Si i = j ou cout[i,j] = infini
      Pre[i,j] = nil
    Sinon
      Pre[i,j] = i
    Finsi
```

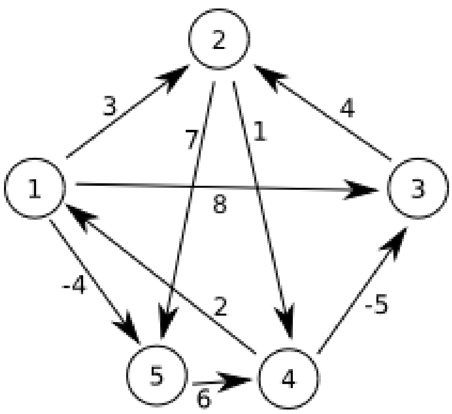
```
  Finpour
Finpour
```

Calcul de A et de Pre :

```
Pour k de 1 à n Faire
  Pour i de 1 à n Faire
    Pour j de 1 à n Faire
      Si A[i,k] + A[k,j] < A[i,j] Alors
        A[i,j] = A[i,k] + A[k,j]
        Pre[i,j] = Pre[k,j]
      Finsi
    Finpour
  Finpour
Finpour
```

3.2 Question 2 : Application

Donnez la matrice $A^{(0)} = A$ correspondante au graphe ci-dessous.



$$A^{(0)} = A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -3 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$