Séance de TD 08

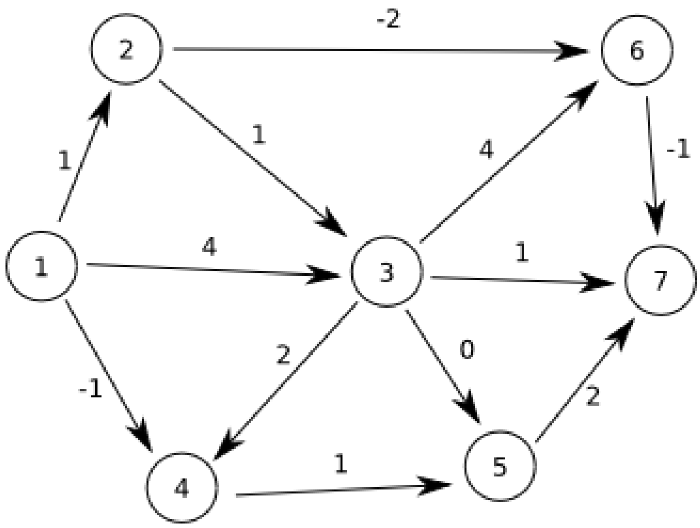
1 Exercice 1

Calcul du plus long chemin

Adaptation de l'algorithme de Bellman pour calculer le plus long chemin dans un graphe orienté sans circuit.

Soit $G = (S, A, W)$ un graphe orienté pondéré, $s \in S$ est un sommet source. Notons par $L(x)$ la longueur d'un plus long chemin d'origine s et d'extrémité x.

1. Montrer qu'il existe un plus long chemin de s à x
2. Adapter l'algorithme de Bellman pour calculer les plus longs chemins d'origine S.
3. Appliquer l'algorithme au graphe suivant



1.1 Question 1

G est un graphe **sans circuit**.

⇒ Tous les chemins élémentaires sont de longueur finie.

⇒ Quelquesoit le sommet x du graphe, Il existe un plus long chemin de S vers x.

1.2 Question 2

Rappel de l'algorithme de Bellman pour le calcul des plus courts chemins :

```
Bellman(G,d,s)
  d(S) <- 0
  Pour tout x dans S[G] privé de {1} d(x) <- + infini
  Pour i dans S[G] privé de {1} Faire
    Pour tout x dans Adj(i) Faire
      d(x) <- min (d(i) + w_(i->x), d(x))
    Finpour
  Finpour
Fin
```

Adaptation pour le calcul des plus longs chemins :

```
Bellman(G,d,s)
  d(S) <- 0
  Pour tout x dans S[G] privé de {1} d(x) <- - infini
  Pour i dans S[G] privé de {1} Faire
    Pour tout x dans Adj(i) Faire
      d(x) <- max (d(i) + w_(i->x), d(x))
    Finpour
  Finpour
Fin
```

1.3 Question 3

Itération	d(1)	d(2)	d(3)	d(4)	d(5)	d(6)	d(7)
Init.	0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
1	0	1	4	-1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
2	0	1	4	-1	$-\infty$	-1	$-\infty$
3	0	1	4	6	4	8	5
4	0	1	4	6	7	8	5
5	0	1	4	6	7	8	9
6	0	1	4	6	7	8	9

Le plus long chemin du graphe est la suite de sommets suivante : 1-3-4-5-7.

2 Exercice 2

Potentiel d'un graphe.

Soit $G = (S, A, w)$ un graphe orienté valué, $s \in S$ une source, et $p \in S$ un sommet puits.

Une fonction potentielle $\Pi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ doit satisfaire aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \Pi(s) = 0 \\ \forall (x,y) \in A^2, \Pi(y) - \Pi(x) \geq w_{x,y} \end{cases}$$

La quantité $\Pi(G) = \Pi(P)$ est appelée potentiel du graphe G.

1. Montrez qu'une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une fonction potentiel est qie G ne possède pas de circuit de longueur > 0.
   Nous supposons maintenant que cette condition est satisfaite. Soit $L(x)$ la longueur d'un plus long chemin d'origine S et d'extrémité x.
2. Montrez que $L(x)$ définit une fonction potentiel. En déduire une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un potentiel.
3. Une fonction potentiel Π est dite minimale si $\Pi(G)$ est minimum (i.e. $\forall \Pi', \Pi'(P) \geq \Pi(P)$). Montrez que la fonction potentiel définie par les valeurs $L(x)$ est minimale.
4. Soit $\sigma(x)$ la longueur d'un plus court chemin d'origine x et d'extrémité P. Montrez que $\Pi(x) = L(p) - \sigma(x)$ est une fonction potentiel minimale.
5. Quel algorithme peut-on utiliser pour calculer les deux potentiels L et Π ?

2.1 Question 1

Supposons que G possède un circuit de longueur > 0.

Soit Π une F.P.

$$\left.\begin{array}{l} \Pi(s_2) - \Pi(s_1) \geq w_{s_1 s_2} \\ \Pi(s_3) - \Pi(s_2) \geq w_{s_2 s_3} \\ \ldots \\ \Pi(s_k) - \Pi(s_{k-1}) \geq w_{s_{k-1} s_k} \\ \Pi(s_1) - \Pi(s_k) \geq w_{s_k s_1} \end{array}\right\} \Rightarrow L(c) \leq 0 \textit{ (1)}$$

et

$$L(c) = w_{s_1 s_2} + \ldots + w_{s_k s_1} > 0 \textit{ (2)}$$

(1) et *(2)* étant incompatibles, on obtient ce que l'on cherchait à démontrer.

2.2 Question 2

$L : x \longrightarrow a$, avec a longueur du plus long chemin de S à x.

$\Pi(s) = 0, L(s) = 0$

$L(s) = 0$ car G ne possède pas de circuit de longueur > 0.

Soit $(x, y) \in AxA(x \neq y)$

Par définition de L, $L(y) \geq w_{x,y} + L(x)$

$\Rightarrow L(y) - L(x) \geq w_{x,y}$

Condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction potentiel : Il faut et il suffit qu'il existe un plus long chemin.

2.3 Question 3

On suppose qu'il existe une fonction potentielle Π minimale.

$$\Pi(x) < L(x)$$

Soit $(s = s_1 ... s_k \neq p)$ un plus long chemin de G.

Π est une F.P.

$$\begin{array}{l}
\Pi(s_2) - \Pi(s_1) \geq w_{s_1 s_2} \\
\Pi(s_2) - \Pi(s_1) \geq w_{s_1 s_2} \\
... \\
0 \geq w_{s_1 s_2} + ... + w_{s_k s_p} \\
\Pi(p) - \Pi(s_1) \geq w_{s_1 s_2} + ... + w_{s_{k-1} s_k} \\
\Pi(p) \geq L(p) \text{ absurde, vis à vis des hypothèses}
\end{array}$$

$\Rightarrow L$ est une FPM.

2.4 Question 4

$\Pi(x) = L(p) - \sigma(x)$ est-elle une F.P.M. ?

$\Pi(x) = L(p) - \sigma(s) = L(p) - L(sp) = L(p) - L(p) = 0$

Soit $(x, y) \in G \times G$

$$\Pi(y) - \Pi(x) = L(p) - \sigma(y) - L(p) + \sigma(x)$$
$$= \sigma(x) - \sigma(y) \geq w_{x,y}$$

$\Rightarrow L$ est une F.P. Est-elle minimale ?

$$\Pi(p) = L(p) - \sigma(p) = L(p)$$

Sachant que L est minimale, alors Π l'est également.

2.5 Question 5

Pour le calcul de L et Π, on peut utiliser l'algorithme de Bellman.