TD 12 : NP-Complétude

Enoncé du problème

Le problème de la coloration d'un graphe avec 3 couleurs, appelé en abrégé **3-COL**, est le suivant :

– Instance : Un graphe $G = (S, A)$, non orienté avec m arêtes et n sommets.

La question principale de cette séance est la suivante : Les sommets de G peuvent-ils être coloriés avec trois couleurs, de telle sorte que deux sommets reliés par une arête ne soient jamis de même couleur ?

Dans la suite, les couleurs seront notées $0, 1$ et 2. Une coloration est don une fonction $\mu : S0, 1, 2$, où pour toute arête $(i, j) \in A$, on a : $\mu(i) \neq \mu(j)$.

Question 1

Montrez que **3-COL** appartient à la classe **NP** : expliquez en quoi consiste dans ce cas, un certificat, et évaluer précisément la complexité de l'algorithme de vérification du certificat.

Corrigé

Soit $\mu : S \longrightarrow \{0, 1, 2\}$.
$i \longrightarrow \mu(i)$

Petit rappel de cours :

- NP implique une vérification de la solution en un temps polynômial.
- P implique un calcul de la solution en un temps polynômial

μ représente le certificat de vérification. Il suffit de vérifier que $\forall i \in J, \mu(i) \in \{0, 1, 2\}$.

La complexité est la suivante :

$f(n + m)$, qui est polinômiale. Le problème est bien NP.

Question 2

A chaque sommet i on associe trois variables booléennes, x_i, y_i et z_i ; la première (resp. seconde et troisième) exprime le fait que la couleur du sommet i vaut 0 (respectivement 1 et 2). Ainsi la classe :

$x_i \vee y_i \vee z_i$, où $\vee$ signifie “ou”, exprime que le sommet i est colorié.

Complétez ces n clauses pour obtenir un ensemble de clauses ϕ tel que tout choix de valeurs pour les $3 \cdot n$ variables booléennes, qui satisfait ϕ, corresponde à une coloration de G, et vice-versa.

Corrigé

On associe $\forall i \in S$, les 3 variables x, y, z valent respectivement 0, 1 et 2.

Donc $x_i \vee y_i \vee z_i$ signifie que i est colorié.

$$\phi = x_i \vee y_i \vee z_i, \neg(x_i \wedge x_j); \neg y_i \vee \neg y_j; \neg z_i \wedge \neg z_j, \forall i \in S$$

Question 3

Combien de clauses la formule ϕ contient-elle ? La construction précédente constitue-t'elle une réduction $3-COL \longrightarrow SAT$, satisfabilité d'une formule booléenne (ou plus précisément CNF), ou l'inverse ? Cette réduction est-elle polynômiale ?

Corrigé

$|\phi| = n + 3 \cdot m$, $A = 3$ couleurs, $B = SAT$.

$G = (S, A), |S| = n, |A| = m$.

A chaque instance de A on associe une instance de B.

$\phi = f(G)$, f étant la réduction.

La construction précédente est une réduction polynômiale, car $|\phi| = n + 3 \cdot m$.

Question 4

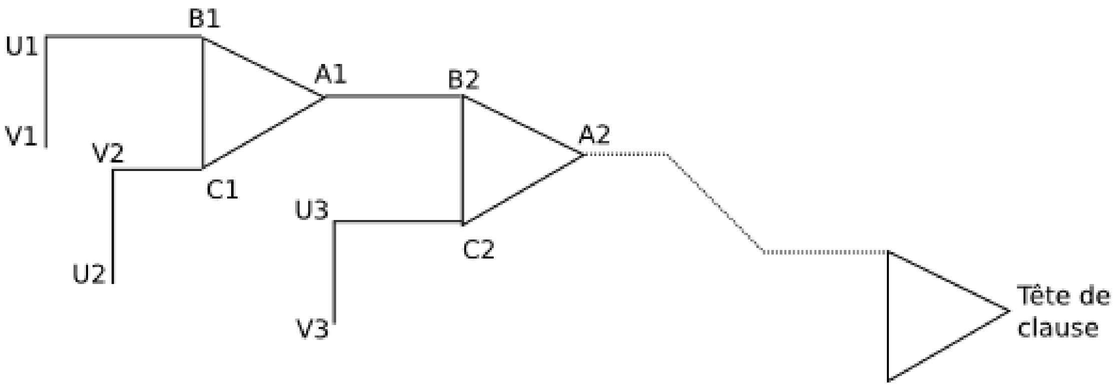
La réduction précédente est en accord avec le Théorême de Cook.

Dans la suite, on part, inversement, d'un ensemble ϕ de clauses, auquel on veut associer une instance de **3-COL**. Pour cela, on construit un graphe comme suit :

- A chaque variable booléenne x_i on associe un segment U_iV_i (c'est à dire 2 sommets, qu'on appelera principaux, reliés par une arête).
- A chaque opérateur $\vee$ (connecteur) on associe un triangle $A_jB_jC_j$, c'est à dire trois sommets, qu'on appelera annexes, reliés par 3 arêtes). A_j est appelé tête du triangle.
- Si, par exemple, la première clause débute par $x_1 \vee \neg x_2$, on relie par une arête le sommet principal $U1$ au sommet annexe B_1, et le sommet principal V_2 au sommet annexe C_1.
- Si, par exemple, la première clause débute par $x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3$, on la traite comme $(x_1 \vee \neg x_2) \vee x_3$: U_1 et V_2 sont attachés au premier triangle, puis on relie sa tête A_1 à B_2, et U_3 à C_2.
- Et ainsi de suite : une clause comportant k variables est représenté par une chaîne de $k-1$ triangles ; la seule tête de triangle qui reste "libre" est appelée tête de clause.

- Le graphe G comporte enfin deux sommets supplémentaires, notés Z (zéro) et N (Neutres), et reliés entre eux. Z a pour couleur 0, et N a pour couleur 2.

N est relié à tous les sommets principaux et à toutes les têtes de triangles ; Z est relié à toutes les têtes de clauses.



Complétez le dessin pour le graphe associé aux clauses $(x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ et $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$. Ce graphe comporte 5 triangles.

Corrigé

Petit rappel de cours sur le **théorème de Cook** :

$\forall$ Problème de classe NP, $\exists$ une réduction polynômiale $A \longrightarrow SAT$.

La construction précédente (f) est en accord avec le théorême de Cook.

On part de ϕ pour arriver à un problème **3-COL**.

$\vee x_i \longrightarrow u_i v_i$

$v \longrightarrow A_i B_i C_i$, avec A_i tête de triangle.

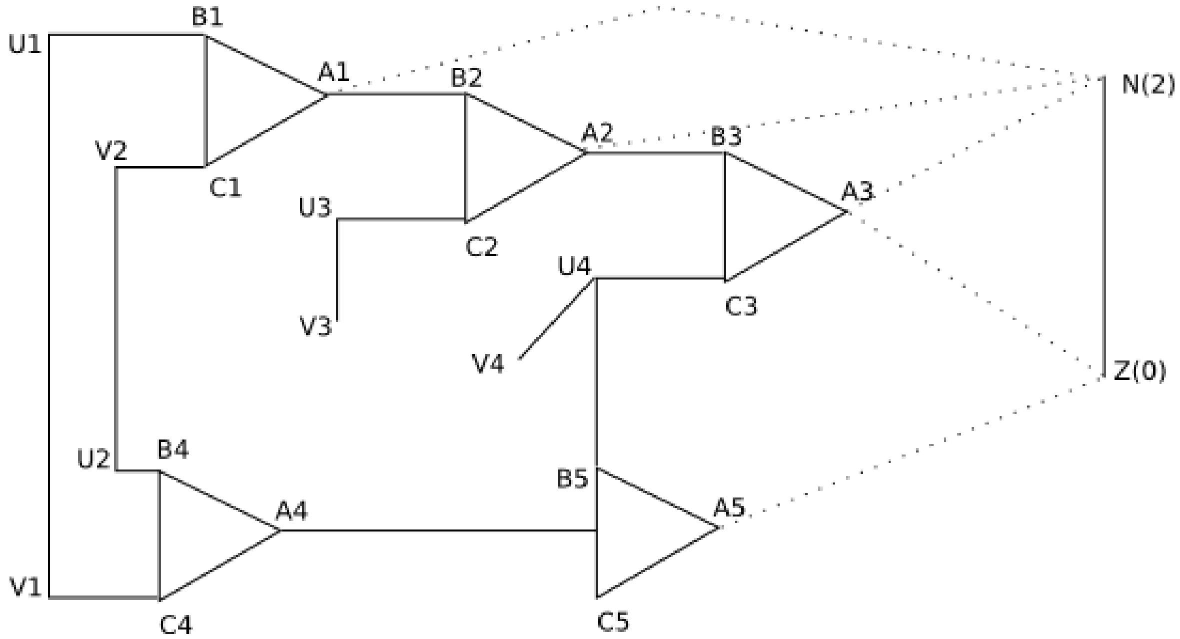
$x_1 \wedge \neg x_2$

Soit $\phi = x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee x_4, \neg x_1 \vee x_2 \vee x_4$. $(x_1 = u_1 v_1)$.

$x_1 \longrightarrow COM(u_1)$

$\neg x_1 \longrightarrow COM(v_1)$

$\neg x_3$ et $\neg x_4 \notin \phi$, alors les 2 sommets ne seront pas reliés à d'autres sommets.



Question 5

Expliquez le rôle des sommets N et Z.

Corrigé

- Fixer les têtes de clause à la couleur 1 (rôle commun à N et Z).
- Fixer les têtes des triangles à porter les couleurs 0 ou 1. (N uniquement).

Question 6

Montrez que si une tête de triangle A_j a pour couleur 1, au moins l'un des sommets, autres que A_j, reliés à B_j et C_j, a pour couleur 1.

Corrigé

Si A_j a pour couleur 1, alors B_j ou C_j a pour couleur 0. Supposons que B_j ait pour couleur 0, alors la seule couleur possible pour le sommet A associé à B et différent de C est 1 à cause de la couleur 2 portée par N.

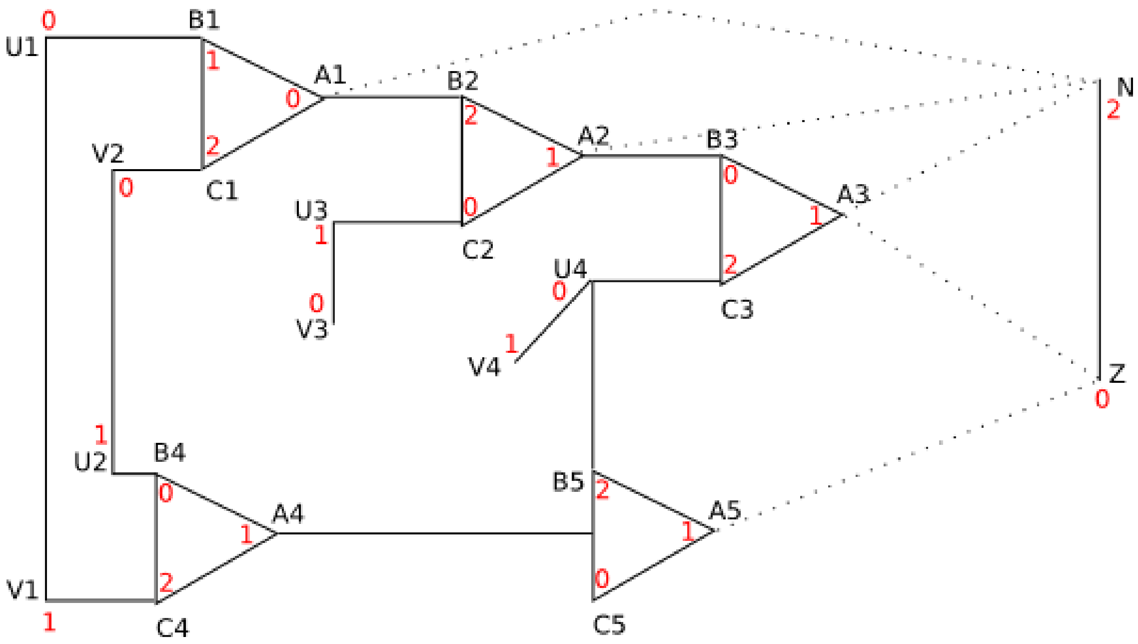
Question 7

Illustrez, sur l'exemple de la question 4, comment tout choix de valeurs pour les 4 variables booléennes, qui satisfait les deux clauses, correspond à une coloration de G.

Corrigé

Soit le choix suivant :

$u_1 v_1 \leftarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0.$



Question 8

Evaluez précisément, en fonction du nombre n' de variables booléennes et du nombre m' de connecteurs, la taille du graphe ainsi construit. En déduire que cette construction est une réduction polynômiale.

Corrigé

On a construit $G = (S, A)$, $|S| = n, |A| = m$.

$$n = 2 \cdot n' + 3 \cdot m' + 2$$

$$m = n' + 3 \cdot m' + 2 \cdot m' + m' + 2 \cdot n' + 1 + c$$

c étant le nombre de têtes de clause.

Cette construction g est une réduction polynômiale $SAT \longrightarrow 3COL$. En effet, à chaque instance de SAT on a associé une instance $G = g(\phi)$ du problème 3-COL.

ϕ est satisfaisable $\iff$ $g(\phi)$ est 3-coloriable.

Question 10

En déduire que **3-COL** est **NP-Complet**.

Corrigé

On en déduit que le problème 3-COL est NP-Complet.